Oportunidades para la Optimización en Geometría Computacional

Manuel Abellanas
Universidad Politécnica de Madrid

Objetivos de la charla

- Presentar algunas aplicaciones de la Geometría computacional en problemas de optimización.
- Presentar problemas de optimización geométricos que requieren métodos no deterministas.

Ubicación de servicios

Problema:

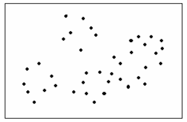
Dado un conjunto *D* de puntos de demanda, minimizar, sobre los conjuntos *S* apropiados, la función objetivo:

$$c(D,S) = \max_{d \in D} \min_{s \in S} \delta(d\ ,s)$$

Problemas de tipo p-centro

Versión geométrica:

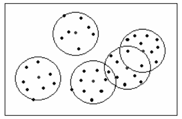
Dados *n* puntos de R^n, hallar *p* bolas del mismo radio que contengan a los *n* puntos de forma que el radio sea mínimo.



Problemas de tipo p-centro

Versión geométrica:

Dados *n* puntos de R^n, hallar *p* bolas del mismo radio que contengan a los *n* puntos de forma que el radio sea mínimo.



1-centro euclídeo

Problema:

Hallar la bola de menor radio que contiene a n puntos

problema	complejidad
dim 2 mediante diagrama de Voronoi lejano	*O(n log n)*
dim 2 mediante poda y búsqueda (Megiddo)	*O(n)*
dim d mediante poda y búsqueda (Megiddo)	$O(d^{O(d)}n)$
dim 2 ponderado (Megiddo)	O(n)

Diagrama de Voronoi

Teselación del espacio en función de la proximidad a n sitios.

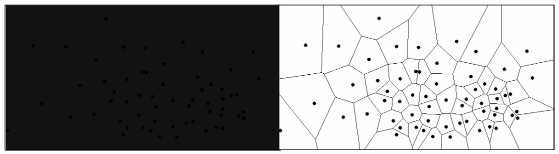
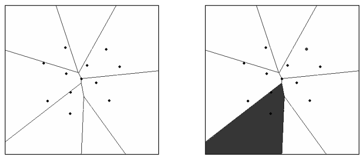


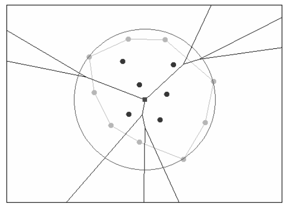
Diagrama de Voronoi lejano

Teselación del espacio en función de la lejanía a n sitios



1-centro

Relación entre el 1-centro y el diagrama de Voronoi lejano



1-centro para clases

Problema:

En un conjunto de puntos del plano hay *k* clases distintas. Hallar un círculo de radio mínimo que contenga algún punto de cada clase.

Smallest Color-Spanning Objects
M. Abellanas, F. Hurtado, C. Icking, R. Klein, E. Langetepe, L. Ma, B. Palop, V. Sacristán,, ESA 2001 (9th Annual European Symposium on Algorithms)

El problema de la residencia

(Buscando el mejor sitio para vivir)

Hallar un punto lo más próximo posible a todos los servicios

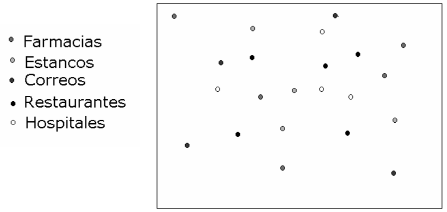


Diagrama de Voronoi del color más lejano

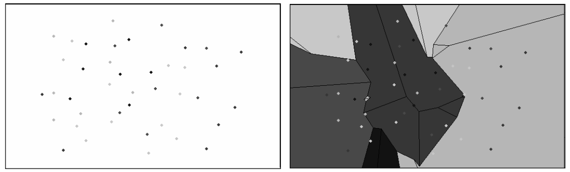
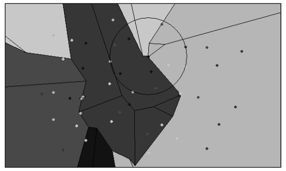


Diagrama de Voronoi del color más lejano

Círculo mínimo contenedor de todos los colores



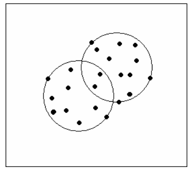
1-centro para clases

Construcción del diagrama de voronoi del color más lejano	*O(kn log n)*
Revisión del diagrama (vértices tricolores y aristas bicolores	*O(kn)*
Total	*O(kn log n)*

2-centro euclídeo

Problema:

Dados n puntos, hallar dos bolas iguales de radio mínimo que contengan a todos los puntos.



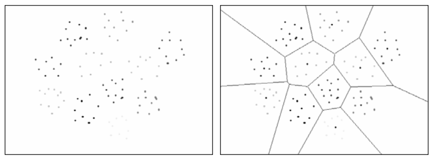
2-centro (d = 2)

Algoritmo	complejidad
Separadores lineales + 1-centro	$O(n^3)$
Matousek '91 (Aleatorización)	$O(n^2 \log^2 n)$
Jaromczyk et al.'94 (Búsqueda paramétrica)	$O(n^2 \log n)$
Sharir '97	$O(n \log^9 n)$
Eppstein '97	$O(n \log^2 n)$ (esperada)
Chan'99	$O(n \log^2 n \log^2 \log n)$

k-centro para clases separadas

Problema:

Dados *k* conjuntos de puntos, $S_1, \ldots S_k$, cuyos cierres convexos son disjuntos dos a dos, hallar *k* puntos de suministro, $p_1, \ldots, p_k$, tales que S_i esté contenido en $Vor(p_i)$ y se minimice la máxima distancia entre cada p_i y los puntos de S_i.



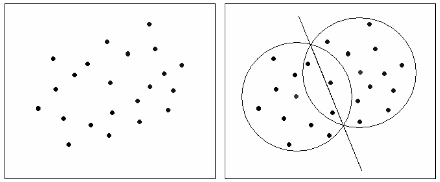
p-centro para clases

P = 1	1- centro
P = 2	$O(n^3)$
2 < P < n	?
P = n	trivial

2-centro bicromático

Problema:

Dados dos conjuntos de puntos cuyos cierres convexos no se cortan, hallar dos círculos de igual tamaño tales que cada uno contenga a uno de los conjuntos y la mediatriz de sus centros separe a los conjuntos.



Referencia: Belén Palop, Algorithmic problems on proximity and location under metric constraints. Tesis, UPC 2003.

Estimadores geométricos

Problema:

Hallar el objeto geométrico que minimiza la máxima distancia a un conjunto de puntos.

» Puntos: p-centro
» Recta: recta centro
» Segmento: segmento centro
» Circunferencia: circunferencia centro
» Rectángulo: rectángulo centro
» …

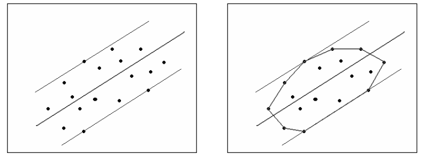
Aplicaciones en:

- certificación geométrica (metrología)
- localización

Recta centro

Problema:

Dados n puntos, hallar una recta que minimice la máxima distancia entre los puntos y la recta.

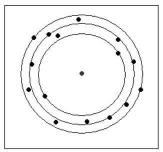


O(n log n) . No se generaliza a dimensiones altas.

Ajuste de circunferencias

Problema:

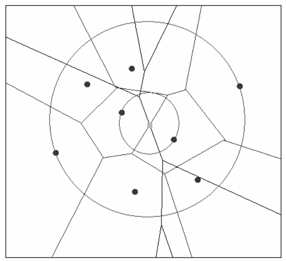
Dados *n* puntos en R^d, hallar un punto que minimice la **diferencia** entre la menor y la mayor distancia del punto a los puntos dados.



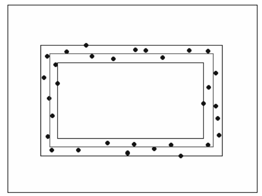
Ajuste de circunferencias

Relación con los diagramas de Voronoi:

– El punto solución está en una arista del diagrama de Voronoi
– El punto solución está en una arista del diagrama de Voronoi lejano



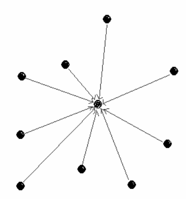
Ajuste de rectángulos



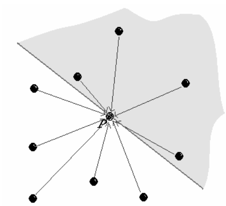
Cobertura envolvente

Minimum Illumination Range Voronoi Diagrams ,
M. Abellanas, A. L. Bajuelos, G. Hernández, F. Hurtado, I.Matos, B. Palop
The 2nd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, October 10 - 13, 2005 Hanyang University, Seoul, Korea

BUENA ILUMINACION



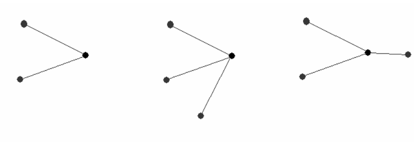
BUENA ILUMINACION



Hay al menos un foco iluminando P en todo semiplano que contiene a ***P***

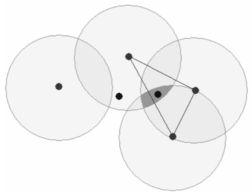
Aplicaciones…

- *Iluminación sin sombras*
- *Buena cobertura por radiofrecuencia*
- *Localización geográfica con sensores*



Un modelo más realista:

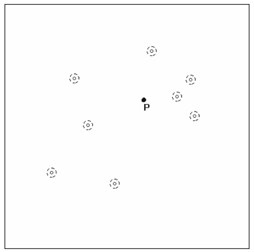
Iluminación de rango acotado



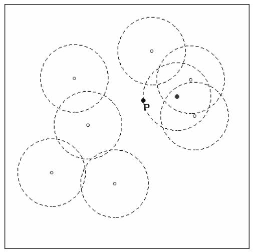
Problema de optimización 1:

¿Cuál es el rango mínimo que deben tener los focos para que un punto P esté 1-bien iluminado?

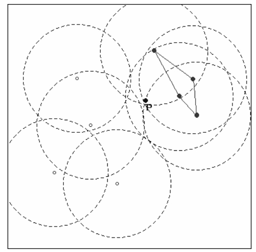
Problema: Dado un punto P , ¿cuáles son los focos más cercanos a P que 1-bien iluminan a P?



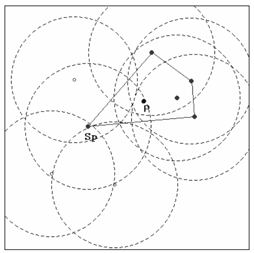
Problema: Dado un punto P , ¿cuáles son los focos más cercanos a P que 1-bien iluminan a P?



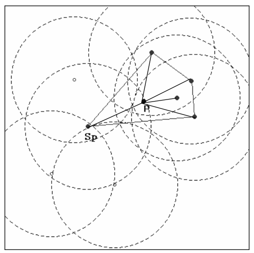
Problema: Dado un punto P , ¿cuáles son los focos más cercanos a P que 1-bien iluminan a P?



Problema: Dado un punto P , ¿cuáles son los focos más cercanos a P que 1-bien iluminan a P?



Nearest Neighbor Embracing Graph:



Las aristas incidentes en un vértice del NNEG se pueden calcular en tiempo O(n).

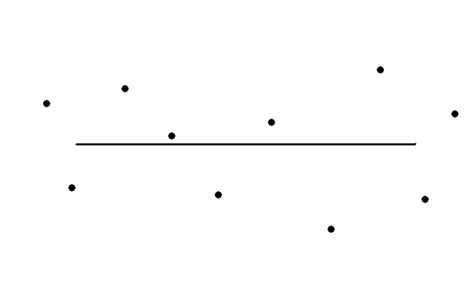
(Esto resuelve el problema 1).

Problema de optimización 2:

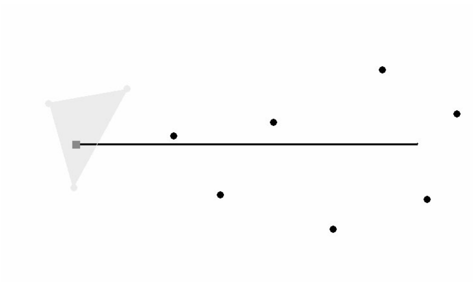
Encontrar un conjunto de luces de cardinal mínimo que iluminen bien un punto P con el menor rango posible.

(Queremos saber qué luces debemos encender y con qué potencia.)

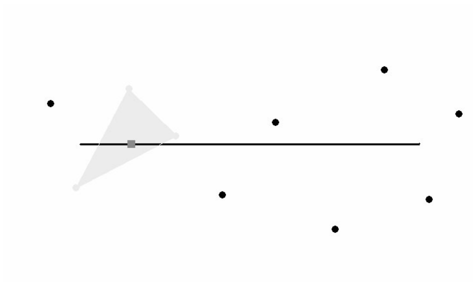
Cobertura de una ruta



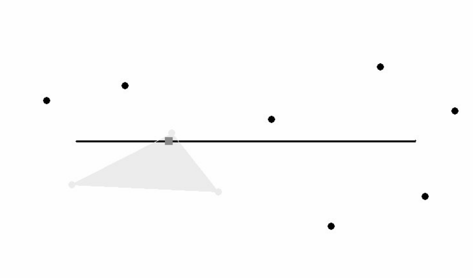
Cobertura de una ruta



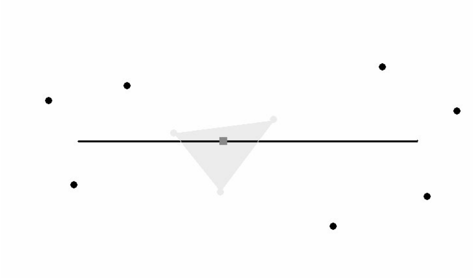
Cobertura de una ruta



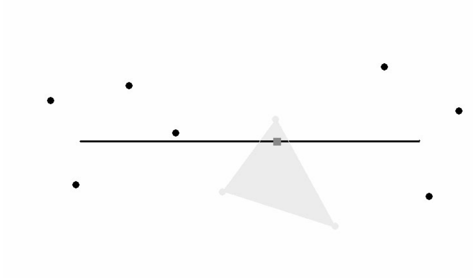
Cobertura de una ruta



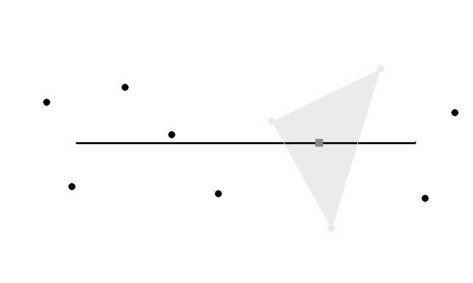
Cobertura de una ruta



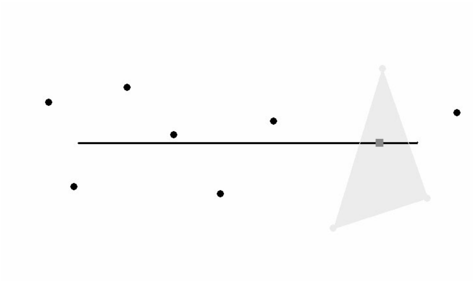
Cobertura de una ruta



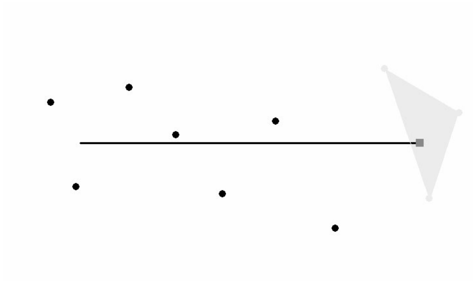
Cobertura de una ruta



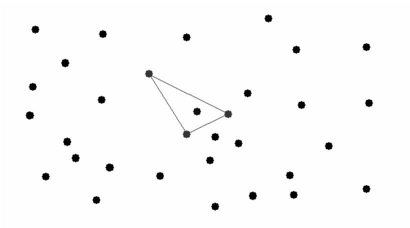
Cobertura de una ruta



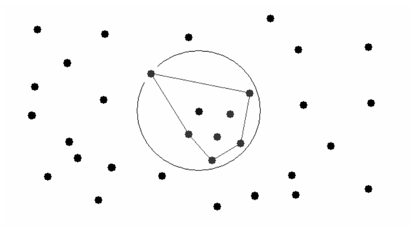
Cobertura de una ruta



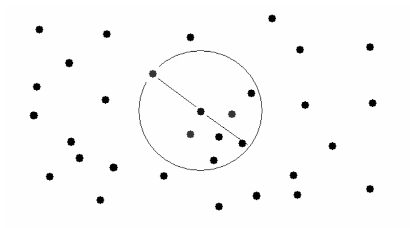
Problema 2: Dado un punto P, queremos hallar un conjunto de cardinal mínimo de luces que iluminen bien a P con la menor potencia posible.



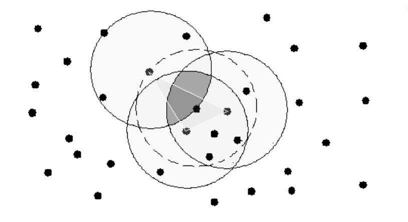
Problema 2: Dado un punto P, queremos hallar un conjunto de cardinal mínimo de luces que iluminen bien a P con la menor potencia posible.



Problema 2: Dado un punto P, queremos hallar un conjunto de cardinal mínimo de luces que iluminen bien a P con la menor potencia posible.



Proposición: El MIR point de un punto respecto de un conjunto de n luces se puede hallar en tiempo O(n) y un MIR triángulo también en tiempo O(n).



Cuestión: Cómo preprocesar el conjunto S para poder hallar el MIR point de un punto cambiante P o de muchos puntos distintos.

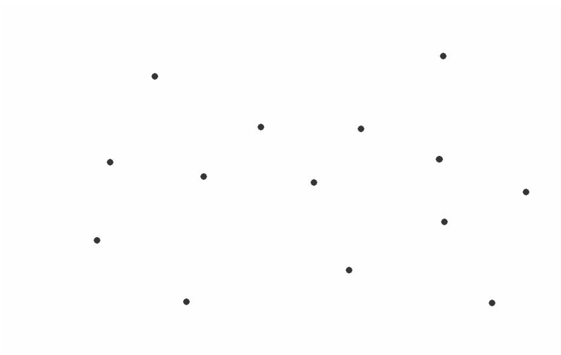
Diagrama de Voronoi del rango de iluminación mínimo (MIR Voronoi diagram)

Sea ***S* = { *s1*, ... *sn* }** *un conjunto de puntos del plano.*

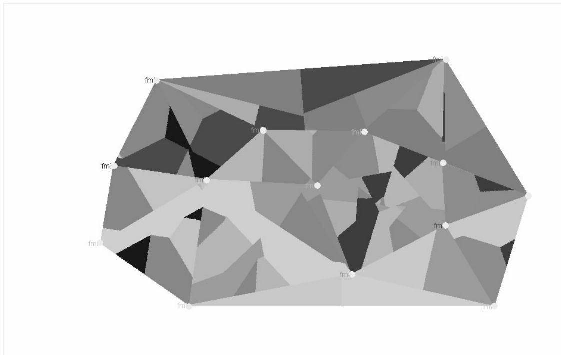
*Llamamos región de Voronoi MIR de **si** al conjunto*

***MIR-VR(si,S)* = {*x* : MIR point de *x* respecto de *S* es *si*}**

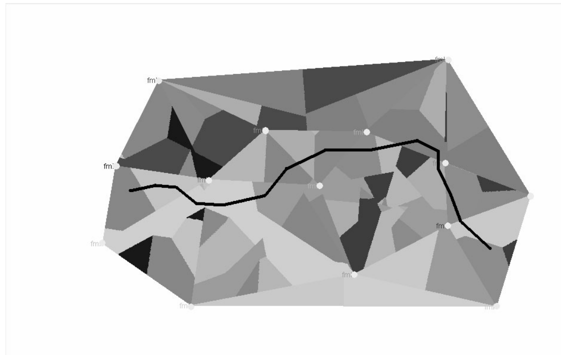
EJEMPLO:



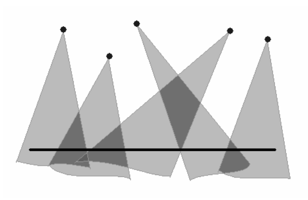
EJEMPLO:



EJEMPLO:



NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación



Stage Illumination Problem

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

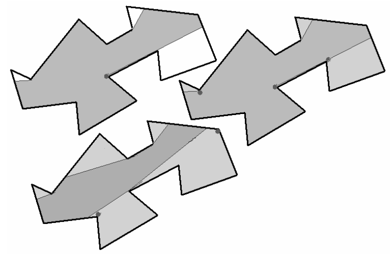
*Iluminación de escenarios (*Stage Illumination Problem*)*

Dado un segmento r y un conjunto F={f1, f2, …, fn} de reflectores de amplitudes {α1, α2, …, αn} respectivamente, situados en puntos fijos del plano todos ellos en el mismo lado de r. ¿Es posible girar los reflectores alrededor de su punto de anclaje de forma que en la configuración final el segmento r esté totalmente iluminado?

En 1998 Ito, Uehara y Yokoyama demostraron que el problema es NP-completo, incluso si los reflectores se colocan sólo en dos puntos.

Si todos los ángulos son iguales se conjetura que sigue siendo NP-completo.

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación



Minimum Vertex Guard Problem

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

Minimum Vertex Guard Problem

Dado un polígono P de n vértices, averiguar cuál es el mínimo número de guardias (focos) situados en los vértices de P que vigilan (iluminan) todo el polígono.

Este problema es NP-duro, Lee y Lin (1979)

En el mismo artículo demuestran que también son NP-duros los problemas:

Minimum Point Guard

los guardias se pueden colocar en cualquier punto de P

Minimum Edge Guard

en el que cada guardia se puede mover sobre una arista del polígono.

Si los polígonos son ***ortogonales***, Schuchardt y Hecker (1995) han probado que son NP-duros los problemas Minimum Vertex Guard y Minimum Point Guard

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

Conjuntos de puntos y guardias ocultos en polígonos.

Dado un polígono P y un conjunto de puntos H en el polígono P, se dice que H es un conjunto *oculto* si todos los segmentos que unen pares de puntos de H cortan el exterior de P.

Maximum Hidden Set

Maximum Hidden Vertex Set

Shermer (1989) demostró que los problemas de calcular el tamaño máximo de un conjunto oculto de puntos o de un conjunto oculto de vértices son ambos NP-duros.

Minimum Hidden Guard Set

Minimum Hidden Vertex Guard Set

Un conjunto de *guardias ocultos* debe vigilar todo el polígono y ser al mismo tiempo un conjunto oculto. Shermer (1989) probó que los siguientes problemas son NP-duros.

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

Rutas de vigilancia.

Optimum Watchman Route

Dado un polígono P y un guardia que debe vigilar todo el polígono siguiendo un camino cerrado, hallar la ruta más corta que puede seguir el vigilante.

Chin y Ntafos probaron en 1988 que el problema era NP-duro para polígonos con agujeros, incluso si los agujeros son convexos.

Para polígonos sin agujeros hay algoritmos polinómicos, tanto si la ruta del vigilante tiene un punto de partida como si no existe ese punto inicial.

Rutas en el Zoo y en el Safari.

Si el objetivo del caminante es visitar algunos polígonos ("sites") contenidos en P, estamos ante lo que Chin y Ntafos denominaron

The Zoo-keeper's Problem, si no se puede entrar en los "sites" y

The Safari Rote Problem, si se permite entrar en los "sites".

Ambos problemas son NP-duros (1992). Si los "sites" están adosados al borde de P, hay soluciones polinómicas.

NP-completitud en problemas geométricos: Visibilidad – iluminación

NP-completitud en problemas geométricos: *Recubrimientos y particiones de polígonos*.

Dado un polígono P se trata de encontrar el mínimo número de polígonos, de determinado tipo, que son necesarios para recubrir P (las piezas pueden tener interiores no disjuntos) o que constituyen una partición de P, (las piezas deben tener interiores disjuntos).

Si las piezas son estrelladas, el problema de encontrar un recubrimiento mínimo con estrellados es equivalente a resolver el Minimum Point Set Problem para el polígono P. Este problema es NP-duro.

Si las piezas son polígonos convexos, Culberson y Reckhow demostraron en 1988 que el Convex Covering Problem era NP-duro, incluso si sólo se quiere recubrir los vértices o las aristas del polígono.

NP-completitud en problemas geométricos: *Recubrimientos y particiones de polígonos*.

El problema de la partición convexa se resuelve en tiempo polinómico para polígonos simples, pero es NP-duro para polígonos con agujeros, Lingas (1982).

Si el polígono inicial es *ortogonal* y se quiere recubrir con piezas *rectangulares*, Culberson y Reckhow demostraron en 1989 que el Minimum Rectangle Covering Problem era NP-completo.

Palabras clave y referencias:

Diagrama de Voronoi (Voronoi diagram):

- Okabe, Boots, Sugihara, Chiu: ***Spatial Tessellations, 2nd Ed.***, Wiley, 2000
- F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J. Sack and G. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry, Chapter V*, pages 201-290. Elsevier Science Publishing, 2000. [SFB Report F003-092, TU Graz, Austria, 1996]. (Gzipped PostScript, 101 p., 473 KB).
- http://www.igi.tugraz.at/auren/publications.html
- www.voronoi.com

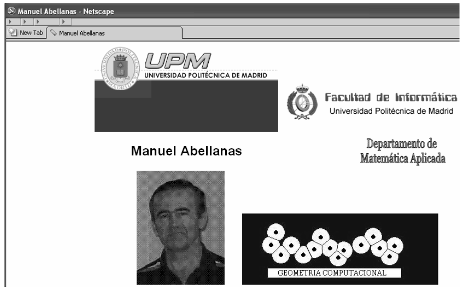
Localización de servicios (Facility location)

- EWGLA: European Working Group on Locational Analysis

Iluminación – Vigilancia – Cobertura

- J. Urrutia

Dónde encontrarme…



http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/